



Matematik Alanında İspat Yapma Süreci Üzerine Yapılmış Bazı Araştırmalardan Bir Derleme

A Corpus-based Study on the Process of Proof within the Field of Mathematics

Burçin Gökkurt ^{a*}, Demet Deniz ^b, Levent Akgün ^a ve Yasin Soylu ^a

^aAtatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye

^bAğrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Ağrı, Türkiye

Öz

Bu çalışmada, matematik eğitimcilerinin, öğretmenlerin, öğretmen adaylarının, üniversite ve ortaöğretim öğrencilerinin ispata yönelik görüşleri, ispat yapabilme düzeyleri, ispat yapma sürecinde yaşadıkları zorlukları, ispat yapmada kullandıkları yöntemleri, stratejileri, yaklaşımları, ispat çeşitleri, ispatın matematik eğitimindeki rolü ve ispatla ilgili süreçler üzerine yapılmış olan araştırmalardan bazılarının derlenmesine çalışılmıştır. Araştırma sonunda, incelenen çalışmaların daha çok öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat yapma sürecine odaklanıldığı görülmüştür. Oysa öğretmenlerin ispata yönelik görüşlerinin, algılarının, ispat yapma sürecinde kullandıkları yöntemlerin, stratejilerin, yaklaşımların ve ispat yapma becerilerinin bilinmesi önem taşımaktadır. Bu nedenle, ileride bu konuda çalışma yapacak olan araştırmacılara, öğretmenlerin ispat yapma düzeyleri, ispat yapma sırasında kullandıkları yöntemler, stratejiler, yaklaşımlar ve bu konudaki algı ve görüşleri üzerine çalışmalar yapmaları önerilebilir.

Anahtar Sözcükler: İspat, matematik eğitimi, ispat yapma süreci

Abstract

The study aims to compile the opinions of mathematics educators, teachers, prospective teachers, university students and secondary school students about the proof; their level of proving; the difficulties that they experience in the process of proving; the methods, strategies and approaches that they use in the process of proving; types of proof; the role of proof in mathematics instruction; and some of the researches conducted on the processes related to the proof. In view of the study, it has been observed that the examined researches rather focused on the proving process of students and prospective teachers. However, it is important to know opinions and perceptions of teachers regarding the proof; the methods, strategies and approaches that they use in the process of proving; and their proving skills. Unfortunately, the number of studies conducted in this field is low in our country. For that reason, the researchers, who will conduct studies on this subject in the future, can be recommended to perform studies on the proving levels of teachers; the methods, strategies and approaches that they use in the process of proving; and their perceptions and opinions on this subject.

Keywords: Proof, mathematics education, process of proving

© 2014 Başkent University Journal of Education, Başkent University Press. All rights reserved.

1. Giriş

Matematik, her aşamasında daha önceki bilgilerin ve edinilmiş becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin sadece üst üste yığıldığı değil aynı zamanda iç içe geçtiği bilim dalıdır (Moralı, Uğurel, Tümnüklü,

* ADDRESS FOR CORRESPONDENCE: Burçin Gökkurt, Department of Elementary Mathematics Education, Atatürk University, Erzurum, Turkey, E-mail address: burcin.gokkurt@atauni.edu.tr / Tel: +90442 2314266

& Yeşildere, 2006). Bir düşünme biçimi olan matematik (Baki, Güven, & Karataş, 2002), sadece sayıları, işlemleri öğretmekle kalmaz, düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminde bulunma, problem çözme gibi önemli beceriler kazandırır (Umay, 2003).

Matematiğin bu özellikleri dikkate alındığında, matematiğe özgü bir düşünmeden yani matematiksel düşünmeden bahsedilebilir. Matematiksel düşünme, problem çözme sürecinde matematiksel kavramları, teknikleri ve yöntemleri dolaylı ya da doğrudan kullanmak olarak ifade edilmektedir (Henderson vd., 2004). Diğer bir deyişle, matematiksel düşünme, matematiksel bakış açısının gelişmesidir. Bireyler, günlük yaşamlarında birçok problemle karşılaşır ve bu problemleri çözmede matematiksel düşünmeyi kullanırlar (Arslan & Yıldız, 2010). Matematiksel düşünme, üst düzey düşünme becerileri gerektirir ve matematiksel düşünmeyi belirlemek için yapılması gerekenlerden biri de matematikçilerin teoremleri nasıl ispatladıklarını anlamaya çalışmaktır (Polya, 1945). Bu doğrultuda, ispat, matematiksel düşünmede önemli rol oynar. Çünkü ispatlama sırasında, bir önermeyi açıklama, neden doğru veya yanlış olduğunu söyleme ve değişik mantıksal düşünme yollarını ve ispat çeşitlerini seçme ve kullanma gibi eylemler söz konusudur (Baki, 2008). İspatlar, matematiksel bilginin formülleştirilmesine veya sonuçların sistematikleştirilmesine katkıda bulunur. Sadece bir ifadenin doğruluğunu göstermekle kalmaz, aynı zamanda öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasına, matematiksel anlayışlarının gelişimine yardımcı olur (Hanna, 1990). Öğrenciler, ispatlar sayesinde matematikçilerin yaptıkları şeylerin ne anlama geldiğini öğrenirler (İmamoğlu, 2010).

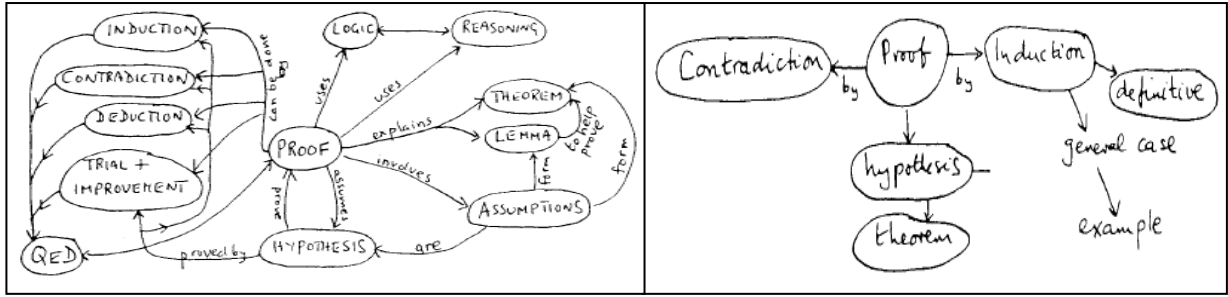
İspatın matematiksel bilginin oluşumundaki öneminden dolayı, matematik öğretiminin temel amaçları arasında, mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecek bireyler yetiştirmek vardır. Bu yüzden bu amaçlar içerisinde, öğrencilerin matematiksel düşünme becerisi hedef alınarak matematiksel ispat süreçlerinin önemine yer verilmiştir (Bahtiyari-Albayrak, 2010). Bu doğrultuda, ispat süreci öğretim programının ayrılmaz bir parçası olup (Schoenfeld, 1994), öğrencilerin bu süreçte, ispat yapma becerilerini kazanmaları gerekir. Bu açıdan, öğrencilerin bu beceriyi kazanabilmeleri için öğretmenlere büyük sorumluluklar düşmektedir. Bu becerinin kazandırılması amacıyla, öğretmenler, derslerde bir teoremin ispatı veya bir problemin çözümü sırasında kullandıkları ifadeleri matematik terminolojisinden seçmelidir. Ayrıca, öğretmenler, öğrencilere ispatın değişik tipleriyle karşılaşabilecekleri elverişli bir öğrenme ortamı sağlamalı (NCTM, 2000) ve matematiksel düşünmenin önemini vurgulamalıdır (Umay, 1996). Çünkü öğretmenlerin ispata yönelik anlayışları, öğrencilerin ispat yapma becerilerini etkilemektedir. Öğretmenlerin ispata yönelik anlayışları sınırlı olduğunda, öğrencilerin ispat konusunda kavram yanılgılarına sahip olma olasılığı artmaktadır (Healy & Hoyles, 2000). Bu doğrultuda, hem öğretmenlerin ya da öğretmen adaylarının, hem de öğrencilerin ispatla ilgili görüşlerini, bu süreçte kullandıkları yöntemleri, yaklaşımları ve yaşadıkları zorlukları bilmek önem taşımaktadır. Ancak, ispatla ilgili yapılan araştırmalara bakıldığında, yurt dışında pek çok çalışmaya rastlanmasına rağmen, ülkemizde bu konuyla ilgili az sayıda çalışmanın yapıldığı görülmektedir. Bu amaçla, çalışmamızda öğretmenlerin, öğretmen adaylarının ve öğrencilerin ispata yönelik görüşleri, ispat yapabilme düzeyleri ve kullandıkları yöntemler, ispat yapma sürecinde yaşadıkları zorluklar ve ispatın matematik eğitimindeki rolü üzerine yapılmış olan araştırmalardan bazılarının derlenmesine çalışılmıştır. Bu derlemede, bu alanda yapılan bazı çalışmalar incelenmiş ve belli kategoriler altında sunulmuştur. Bunlar; ispat kavramının tanımı ve ispatla ilgili görüşler üzerine yapılan çalışmalar, matematik eğitiminde ispatın rolü üzerine yapılan çalışmalar, ispat yapabilme düzeyleri, ispat yapma sürecinde yaşanan zorluklar, ispat yapma sürecinde kullanılan yöntemler, stratejiler, yaklaşımlar, ispat çeşitleri ve ispat yapma ile ilişkili olan süreçler üzerine yapılan çalışmalardır.

1.1. İspat Kavramının Tanımı Ve İspat İle İlgili Görüşler

İspat kavramı, matematik derslerinde öğrenciler tarafından anlaşılması zor, anlamsız, gereksiz (Doruk ve Kaplan, 2013) ve isteksiz yapılan bir etkinlik olarak algılanmaktadır (Alibert, 1998; Almeida, 2003; De Villiers, 1990; Jones, 2000; Knuth, 2002; Raman, 2003). Benzer şekilde, Gökçurt ve Soylu (2012), fen bilgisi ve matematik öğretmenliği programında okuyan birinci sınıf öğrencilerinin, ispatın matematik öğretimindeki rolünün farkında olmadıklarını ve çoğunun ispatı gereksiz bir etkinlik olarak gördüklerini ortaya koymuşlardır. Bu nedenle, öğrenciler bu kavramı ifade ederken farklı kavramlar kullanmakta ve bunu yaparken de sıkıntı yaşamaktadırlar. Dane (2008)'nin çalışmasında, öğrencilerden bazıları ispatı, "tanımsız kavramlara, aksiyomlara veya daha önce ispat edilen teoremlere dayanarak, bir dizi mantıksal hükümlerle bir önermenin doğru olduğunu ortaya çıkarma şeklinde" doğru tanımlarken, bazıları ispat kavramını "hipotez" şeklinde ifade ederek yanlış tanımlama yapmışlardır. Başka bir çalışmada ise, öğrenciler ispatı açıklama ve belli adımları olan bir işlem süreci olarak ifade etmişlerdir (Moore, 1994). Köğçe ve Yıldız (2011), üniversite birinci ve son sınıf matematik öğrencilerinin ispat hakkındaki görüşleri üzerine yaptıkları

çalışmada, birinci sınıf öğrencilerinin ispatı, “bir ifadenin doğruluğunu gösterme” olarak tanımladıklarını, son sınıf öğrencilerinin ise “bir ifadenin neden-sonuç ilişkisi içinde, tüm durumlara uygulanabilirliğini belirlemek için doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek” olarak tanımladıklarını belirtmişlerdir.

Matematik eğitimcileri arasında ise, ispat kavramı farklı şekillerde tanımlanmaktadır. Selden ve Selden (2003)’e göre ispat, teoremlerin doğruluğunu test etmek için kullanılan (arguments) iddialardır. Bell (1976) ispatı, belli aşamalar sonucunda gerçekleşen bir süreç olarak tanımlamakta ve bu süreçte doğrulama (bir önermenin doğruluğunu gösterme), açıklama (bir önermenin neden doğru olduğunu gösterme) ve sistematikleştirme (önergeleri, aksiyomları ve teoremleri tümevarımsal bir sistem içerisinde organize etme) eylemlerinin olması gerektiğini vurgulamıştır. De Villiers (1990) bu aşamaları biraz daha genişleterek ispat sürecini doğrulama, açıklama, sistematikleştirme, keşif ve iletişim olarak ifade etmiştir. Baki (2008), matematiksel ispatı bir süreç olarak görmekte ve bu süreci doğrulama, açıklama ve soyutlama olmak üzere üç aşama olarak tanımlamıştır. Başka bir çalışmada ise, ispat bir patika yoluna benzetilmiş ve bu patika yolu özel bir problem çözme durumu olarak ifade edilmiştir (Furinghetti & Morselli, 2009). Shipley (1999)’a göre ispat yapma, hipotezlerin formüle edildiği, test edildiği karmaşık ve sistemli bir problem çözme aktivitesidir. İspatı, insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenek olarak gören Altıparmak ve Öziş (2005), bu yeteneğin okul öncesi dönemden itibaren gelişim gösterdiğini ve uygun stratejilerle daha da ileri taşınabileceğini belirtmiştir. Birçok matematikçi ve matematik eğitimcisi muhakeme ve ispatı matematiğin kalbi olarak tanımlamaktadır (Senk et. al., 2009’dan aktaran Bahtiyari-Albayrak, 2010; Turner, 2010). Jones (1997) yaptığı çalışmada, öğretmen adaylarının matematiksel ispat kavramı hakkındaki anlayışlarını derinlemesine anlamak için kavram haritası tekniğini kullanmış ve çalışma sonucunda öğrencilerin ispat kavramını farklı algıladıklarını ortaya çıkarmıştır. Varghese (2009) de çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapma anlayışlarını belirlemek için, Jones (1997) tarafından oluşturulan 24 anahtar kelime ile matematik öğretmeni adaylarından kavram haritası oluşturmalarını istemiştir. Şekil-1’de Jones (1997) ‘ın çalışmasında yer alan matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispattan ne anladıklarına ilişkin yaptıkları kavram haritalarından örnekler verilmiştir.



Şekil-1. Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Oluşturdukları Kavram Haritası (Jones, 1997.)

Bu kapsamda, ispat öğretmen adayları tarafından farklı algılanmaktadır. Hatta, herhangi bir zamanda farklı insanlar için farklı anlamlara gelmektedir. Örneğin beş yaşındaki bir çocuğa göre ispat olan, üniversitedeki bir akademisyen için ispat olmayabilir (Arslan, 2007).

İspat kavramının tanımı ve ispatla ilgili görüşler üzerine yapılan bu çalışmalara bakıldığında, ispatla ilgili farklı tanımlamaların olduğunu, kimilerine göre ispat kavramının süreç olduğu, kimilerine göre doğrulama, açıklama, soyutlama, sistematikleştirme vb. eylemler olduğu, kimilerine göre okullarda gereksiz yapılan bir aktivite olduğu, kimilerine göre ise insanın sahip olduğu yetenek olarak görülmektedir.

1.2. Matematik Eğitiminde İspatın Rolü

Öğrenciler matematiksel ifadelerin ispatlarını yaparken bir yandan da formülleri son haliyle bilmenin yeterli olmadığını, ulaşılan sonuçların nedenleri ile birlikte açıklanması gerektiğini öğrenirler. Bu açıdan matematiksel ispat, hem matematiğin hem de matematik eğitiminin önemli bir elemanıdır (Güven, Çelik, & Karataş, 2005). İspat, matematiksel bilginin kurulmasında, gelişiminde ve aktarılmasında gereklidir (Stylianides, 2007). Bu doğrultuda ispatlar, sadece bir ifadenin doğruluğunu göstermekle kalmaz, aynı zamanda öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasına, matematiksel anlayışlarının gelişimine yardımcı olur (Hanna, 1990; Hersh, 1993) ve matematiksel düşünce yapısını geliştirir. Öğrenciler, ispatlar sayesinde matematikçilerin yaptıkları şeylerin ne anlama geldiğini öğrenirler (İmamoğlu, 2010). Bununla birlikte öğrenciler ispat sayesinde matematiksel bilgilerini oluşturabilirler, bunları geliştirebilirler ve bu bilgilerle iletişim kurabilirler (Kitcher, 1984). Hanna (2000)’ya göre, ispat matematiğin temel taşlarından biridir ve

matematik dersindeki en önemli rolü, öğrencilerin matematiksel anlamalarının gelişimine yardımcı olmaktır. Öğrenciler ispat becerileri sayesinde varsayımların sonuçlarını veya tanımları daha iyi anlayabilirler. Ayrıca Fawcett (1938)'e göre matematiksel ispat yapmaya çalışmak öğrencilerin kritik düşünme becerilerini geliştirir. İspatlar, öğrencilere problem çözmeye için yeni metotlar, araçlar ve stratejiler sunarlar (Rav, 1999). Bu açıdan bakıldığında, ispat becerisi önemlidir ve öğrencilerin bu beceriyi kazanabilmeleri için öğretmenlere büyük sorumluluklar düşmektedir. Çünkü, öğretmenlerin ispata yönelik anlayışları, öğrencilerin ispat yapma becerilerini etkilemektedir. Öğretmenlerin ispata yönelik anlamaları sınırlı olduğunda, öğrencilerin ispat konusunda kavram yanlışlarına sahip olma olasılığı artmaktadır. Yapılan çalışmalar sonucunda, ilköğretim öğretmenlerinin ve öğrencilerinin deneyerek doğrulamayı ispat yapma olarak düşündükleri ve kavram yanlışısına sahip oldukları görülmüştür (Healy & Hoyles, 2000; Martin & Harel, 1989).

İspatın matematik eğitimindeki rolü üzerine yapılan çalışmalara bakıldığında, ispat ve matematik arasında sıkı bir ilişki olduğu, ispatın matematiksel bilginin oluşumunda önemli bir etken olduğu, öğrencilerin matematiksel düşünce yapısını geliştirdiği ve bu doğrultuda öğrencilerin ispat yapma becerilerinin kazandırılmasında öğretmenlere büyük sorumluluklar düşüğü görülmüştür.

1.3. İspat Yapma Düzeyleri

Balacheff (1987) teorik olarak üç ispat seviyesinden bahsetmiştir. Bunlar pragmatik ispatlar (pragmatic), entelektüel ispatlar (intellectual) ve kanıtlama (demonstration) şeklindedir. Bunlardan en düşük seviyede olan pragmatik ispatlar iken en yüksek seviyede olan ispat seviyesi ise kanıtlamadır. Pragmatik ispat, işlem olarak verilen bir ispatın matematiksel nesnelerin temsilleriyle gösterimidir. Yani, bu seviyedeki bir öğrenci, verilen bir ispatı, örnek vererek şekillerle doğrulamaya çalışır. Entelektüel ispat, sorudaki ifadelerin ve bu ifadeler arasındaki ilişkilerin formüleştirmesine dayanır ve işlem içermez. Diğer bir deyişle, bu ispat seviyesi, formülasyona dayanır. Kanıtlamada ise, bir teori ile organize edilmek zorunda olan veya bir topluluk tarafından kabul edilen bilgiler kullanılır (akt. Özer & Arıkan, 2002).

Weber (2005) çalışmasında üniversite öğrencilerinin ispat süreçlerini semantik, işlemsel ve sentetik olmak üzere üç grup altında toplamıştır. Weber'e göre işlemsel ispat yapanlar yeni ispat yapmak için var olan ispatları şablon olarak kullanırlar. Sentetik ispat yapanlar, kurulan teoremleri ve matematiksel kuralları kullanarak durum hakkında çıkarımlarda bulunurlar. İşlemsel ispatta öğrenciler ispatı bir egzersiz olarak çözmeye çalışırken sentetik ispatlarda öğrenciler ispata bir problem olarak bakarlar. Semantik ispat yapanlar ise, ispatı informal olarak ele alırlar veya ispatlanması gereken şeyin neden doğru olduğunu görmek için ilişkili kavramların sezgisel gösterimlerini ele alırlar. Yang ve Lin (2008) de çalışmasında öğrencilerin ispatla ilgili anlayışlarını tespit etmek için bir model geliştirmiştir. Geometriyi ispat okuyarak anlama modeli (RCGP) olarak tanımladıkları bu modelde dört seviyeden bahsedilmiştir. Birinci seviye *yüzeysel seviyedir* (surface). Bu seviyede öğrenciler, ispatta ifadelerin ve sembollerin anlamlarıyla ilgili temel bilgiyi edinirler. İkinci seviye *elemanları tanımadır* (recognizing the elements). Bu seviyedeki öğrenciler, ispatta doğrudan ya da dolaylı olarak kullanılan ifadelerin mantıksal durumunu izah edebilirler. Üçüncü seviye *bağlantılı elemanlardır* (chaining the elements). Bu düzeydeki öğrenciler, elemanlar arasındaki mantıksal ilişkileri tanımlayarak, ispatla bağlantılı farklı ifadeleri anlayabilirler. Son olarak dördüncü seviye *genellemedir* (encapsulation). Bu seviyedeki öğrenciler, ispatı diğer durumlarda kullanarak tam olarak benimserler. Waring (2000)'e göre, öğrencilerin ispat kavramlarının gelişimi altı düzeyde ele alınmıştır. Bu düzeyler; ispat düzeyi 0 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatın varlığından habersizdir); ispat düzeyi 1 (Bu düzeye sahip olan öğrenciler, ispatın varlığından haberdardır ancak ispatı, birkaç durumu kontrol ederek doğrulama olarak görmektedirler), ispat düzeyi 2 (Bu düzeyde öğrenciler, ispatı değişik veya rastgele seçilmiş örneklerle kontrol etme olarak görmektedirler. Ayrıca, öğrenciler genel bir örnek kullanmanın ispatı şekillendirdiğini düşünmektedirler), ispat düzeyi 3 (Bu düzeydeki öğrenciler, bir ispatı tek başlarına oluşturamazlar ancak belli bir zorluktaki ispatın çözümünü anlayabilirler), ispat düzeyi 4 (Bu düzeydeki öğrenciler, ispatlara olan ihtiyacın farkındadırlar, ispatların oluşumunu anlayabilirler ve sınırlı sayıda, bilindik ispatları oluşturabilirler) ve ispat düzeyi 5 (Bu düzeydeki öğrenciler, bazı formal ispatları ve yeni karşılaştıkları ispatları oluşturabilirler). İspat düzeyleri üzerine yapılan çalışmalara bakıldığında, araştırmacıların ispat kavramının gelişimini farklı düzeylerde ele aldıkları görülmüştür.

1.4. İspat Yapma Sürecinde Kullanılan Yöntemler, Stratejiler, Yaklaşımlar ve İspat Çeşitleri

Matematikte farklı ispat yöntemleri, stratejileri ve yaklaşımları vardır ve her birinin amacı verilen iddianın doğruluğunu veya yanlışlığını kanıtlamaktır. Matematikğin kullandığı ispat yöntemleri genelleme

koşulu, bilinenlerden hareketle önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını gösterme, tümevarım, tümdengelim, olmayana ergi, özel durumlardan yeni genellemeler çıkarma, dönüşüm ve hareket kavramlarından yararlanma, bilinen özel bir kabul ile genele ulaşma ve model kullanarak genelleme yapma şeklindedir (Baki, 2008). Ancak, yapılan araştırmalara bakıldığında bu ispat yöntemlerinin farklı şekillerde sınıflandırıldığı görülmektedir. Örneğin, Bahtiyari-Albayrak (2010) çalışmasında, ispatı doğrudan ve dolaylı ispat olmak üzere ikiye ayırmıştır ve bu ispatları kendi içerisinde de sınıflandırmıştır. Doğrudan ispatı, tümevarım ve tümdengelim ispat olarak belirlerken, dolaylı ispatı, aksine örnekle ispat ve çelişkiyle ispat olarak ele almıştır. Diğer taraftan, Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2011), ispat yöntemlerini tümdengelim ve tümevarım şeklinde sınıflamıştır. Tümdengelim yöntemi içerisinde doğrudan ispat ve dolaylı ispat ele alırken, ayrıca dolaylı ispatı da olmayana ergi, çelişki yöntemi ve aksine örnek verme olarak ele almıştır. Hanna (t.y)'ya göre ise çelişki bulma, tümevarımla ispat ve örnek veya karşıt örnek bulma ile ispat sıklıkla kullanılan ispat yöntemleridir.

İspat yaklaşımları ve stratejileri ile ilgili olarak yapılan çalışmalara bakıldığında, ispat yöntemleri kadar farklı sınıflandırmalar olmasa da, ispat yaklaşımları ve stratejilerinin de kategorilere ayrıldığı görülmektedir. Hemmi (2006; 2010) çalışmalarında ispat yaklaşımlarını üçe ayırmıştır. Bunlar i) doğrulama (ispatın doğruluğunu gösterme) / açıklama (ispatın neden doğru olduğunu gösterme) ii) tümevarım (özel bir durumdan genelleme yapma) / tümdengelim (genel bir durumdan özel bir durumu doğrulama), iii) sezgisel (informal bir dil kullanarak ispat yapma ve gerektiğinde sembollere başvurma) / formal (ispat sürecinde öğrencilere bütün adımları matematiksel sembolleri kullanarak gösterme) iv) ispat yapısı açık olan (ispatın doğasını anlama ve mantıksal yapısına odaklanma) / ispat yapısı açık olmayandır (matematiği mantık ve özel ispat teknikleri gibi ispatın farklı yönlerine odaklanmadan öğretme). VanSpronsen (2008) çalışmasında ise, üniversite öğrencilerinin ispat stratejileri olarak örneklerden faydalanma, görselleştirme ve eşitlik kullanmayı ele aldıklarını tespit etmiştir.

Öğrencilerin ispat yapma sürecinde kullandıkları ispat çeşitleri ile ilgili çalışmalara bakıldığında ise, öğrencilerin farklı ispat çeşitleri kullandıkları görülmektedir. Bunlar; i) Dış kaynaklara dayalı ispat ii) Deneysel ispatı iii) Analitik ispattır. Dış kaynaklara dayalı ispat, otoriter, kurallara dayalı ve sembolik olmak üzere üçe ayrılır. Otoriter ispatta, bir otoriterin doğrulamasına inanma vardır. Bu otoriter, bir kitap, bir öğretmen veya o konuda bilgili herhangi bir kişi olabilir. Kurallara dayalı ispatta, tartışmanın şekli ile yargılama söz konusudur. Sembolik ispat ise, sadece sembollere dayalı olarak yapılan doğrulamadır. Deneysel ispat ise, algısal ve örneğe dayalı ispat olarak ikiye ayrılır. Algısal ispat, algıya dayalı doğrulamayı içerirken, örneğe dayalı ispatta, örnekler yardımıyla ikna etme (doğrulama) vardır. Analitik ispat, transformasyonel ve aksiyomatik ispat olarak ikiye ayrılır. Transformasyonel ispatta, doğrulamalar yapılırken, o durumun genel yönlerinin ele alınması vardır. Aksiyomatik ispat ise, tanımsız terimleri, tanınmaları ve teoremleri doğrulamada kullanılabilmelidir (Harel & Sowder, 1998)

İspat yapma sürecinde kullanılan yöntemler, stratejiler, yaklaşımlar ve ispat çeşitleri ile ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında, araştırmacıların farklı sınıflandırmalar belirledikleri görülmüştür.

1.5. Matematiksel İspat Yapma Sürecindeki Zorluklar

Yapılan araştırmalarda, öğrencilerin ispat yapma sürecinde yaşadıkları zorluklar ortaya konmuştur. Bu çalışmalardan Güler, Kar, Öçal ve Çiltaş (2011), yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmada yaşadıkları güçlükleri *eşitlik kullanma, örneklerden yararlanma ve görselleştirme* olarak belirlemişlerdir. Çalışma sonunda öğretmen adaylarının daha çok *eşitlik kullanma* stratejisinde zorlandıkları gözlenmiştir. Ayrıca, matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tümevarım yapabilmeye yetersiz oldukları, ispat yaparken genellikle örnek vererek ispat yapma yoluna gittikleri belirlenmiştir. Güler, Özdemir ve Dikici (2012) çalışmalarında, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarım yöntemi ile ispat yapma becerilerini incelemiş ve bu becerilerinin düşük olduğunu tespit etmişlerdir. Benzer şekilde Gürsel (2013) çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki matematiksel ispat süreçlerini ele almış ve öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde; kavram imajı oluşturma, problem çözme, ispat yapma ve ispatın doğruluğunu değerlendirme etkinliklerinde güçlükler yaşadıklarını ortaya koymuştur. Başka bir çalışmada, lise öğrencilerinin hemen hemen tamamının istenilen düzeyde tümevarım ve tümdengelim yoluyla ispat yapamadıkları ortaya çıkmıştır (Özer & Arıkan, 2002). İmamoğlu (2010), çalışmasında öğrencilere İS (ispat sınavı) uygulamış ve bu uygulamanın sonucunda birinci sınıfların daha çok tümevarımsal akıl yürütme kullanmaya eğilimleri olduklarını, son sınıfların ise çoğunlukla genelleme yapıp, tümdengelimsel yöntemler kullanmaya eğilimli olduklarını ortaya çıkarmıştır. Harel (2005) sayılar teorisi dersine katılan öğretmen adaylarının tümevarımla ispat yapmalarındaki kavram gelişimlerini ve güçlüklerini incelemiştir. Bu çalışma sonucunda neredeyse bütün adayların genelleme yapabilmeye eksikliklerinin olduğu tespit edilmiştir.

Moore (1990) çalışmasında öğrencilerin basit ispatlardan (algoritmik işlemlerden oluşan) zor ispata geçişlerindeki yaşadıkları zorlukları incelemiştir. Bu çalışmaya göre öğrencilerin yaşadıkları zorlukları kavram anlayışı, matematiksel dil ve notasyonlar ve ispata başlarken yaşanan zorluklar olmak üzere üçe ayırmıştır. Moore (1994) çalışmasında ise literatürde var olan güçlüklerden yararlanarak öğrencilerin ispat yaparken yaşadıkları bu güçlükleri daha da genişletmiştir. Bunlar; tanımları ifade edememe, kavramların anlamlarını sezgisel olarak anlayamama, kavram imajlarını ispat yaparken kullanamama, genelleme ve örnek kullanımı eksikliği, tanımlardan nasıl bir ispat yapısı kullanacağını bilmeme, matematiksel dil ve notasyonları anlayamama ve ispata nasıl başlayacağını bilememedir. Gibson (1998) çalışmasında, öğrencilerin matematiksel ispat konusunda yaşadıkları zorlukları dört faktöre bağlamıştır. Bu faktörler, matematiksel ispatın doğasını ve kuralları anlama, kavramsal anlama, ispat teknikleri ve stratejiler ve biliş kaygısıdır. Weber (2006), öğrencilerin matematiksel ispatla ilgili yaşadıkları problemleri üç kategoride sınıflandırmıştır. Birinci kategori, öğrencilerin matematiksel ispat hakkında sahip oldukları kavramsal bilginin yetersiz oluşudur. İkinci kategori, öğrencilerin bir kavramı ya da bir teoremi yanlış anlamaları ve buna bağlı olarak bu kavramı ve teoremi yanlış uygulamalarıdır. Üçüncü kategori ise, öğrencilerin ispat için strateji geliştirmede yetersiz oluşlarıdır. Knapp (2005) çalışmasında, öğrencilerin ispatı inşa ederken yaşadıkları zorlukları iki temel kaynağa dayandırmıştır. Bunlardan ilki, öğrencilerin ispatın dilini ve mantığını nasıl kullanacağını bilmemeleridir. İkincisi, öğrencilerin tanımlar, teoremler ve örnekler üretmede sahip olması gereken bilgidен yoksun olmalarıdır. Dreyfus (1999) ise çalışmasında, öğrencilerin ispat yazma becerilerine sahip olmadıklarını ve düşündükleri şeyi ifade edemediklerini dile getirmiştir.

1.6. Matematiksel İspat Yapma Süreciyle İlişkili Olan Etmenler

Matematiksel ispat yapma süreciyle ilişkili olan birçok etmen vardır. Bunlardan biri de problem çözme sürecidir. Furinghetti ve Morselli (2009)' a göre ispat yapma süreci ile problem çözme arasında sıkı bir ilişki olup, bu süreç Polya'nın (1945) problemi anlama, plan yapma, planı uygulama ve değerlendirme adımlarından oluşmaktadır. Bahtiyari-Albayrak (2010)' a göre, ispatlar, problemleri çözmek için matematiksel dizinleri gösterme yolu ve bir probleme çözüm için önerilen yaklaşımın gerçekten bir çözüm olduğunu açıklamadır. Altun (2007)' e göre ise, rutin olmayan problemlerin çözümleri bir ilişki, düzen veya örüntünün açıklanmasını gerektirdiğinden öğrencilerde olayları inceleme, ilişki, düzen veya örüntü arama eğilimini artırır, ispat fikrini geliştirir. Bu bağlamda, her tür teoreme, bir sıra dışı problem çözme gözüyle bakılabilir. Weber (2005) de ispatlamayı, mantıksal, sosyal, kavramsal ve problem çözme boyutlarından oluşan karmaşık bir matematiksel etkinlik olarak ele almıştır. Bu doğrultuda, çalışmasında ispat yapma ile problem çözme arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. İspat yapma ile ilgili etkinliklerin, verilen bir ifadenin mantıksal doğruluğunun gösteriminde öğrenciler için problem çözme olarak görülebileceğini belirtmiştir. Üniversite öğrencilerinin ispat yapma çalışmaları sırasında ispatlama deneyimlerinden öğrendikleri fırsatlar ile muhakemeleri arasındaki ilişkiyi dikkate alarak, bu ispatlamalarda kullandıkları muhakemenin farklı çeşitlerini ve problem çözme süreçlerini incelemiştir.

İspat yapma sürecini etkileyen faktörlerden biri de öğrencilerin sahip oldukları inanışlardır. İnanışlar sadece tutumlarla ilişkili olmayıp aynı zamanda ispat yapma sürecini doğrudan etkilemektedir. Çünkü inanışlar ispat stratejilerinin seçilmesinde etkilidir (Furinghetti & Morselli, 2009). Bunların yanında İpek (2010) dinamik geometri yazılımı kullanılmasının ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik ve matematiksel ispat yapma süreçleri üzerinde pozitif bir etkisinin olduğunu tespit etmiştir. Ören (2007) çalışmasında ortaöğretim öğrencilerinin ispat şemalarını kullanmalarında bilişsel stillerin ve cinsiyetin bir etkisinin olmadığını ortaya çıkarmıştır. Coşkun (2009) ise, ortaöğretim öğrencilerinin Van Heile geometri anlama düzeylerinin ve buna bağlı olarak ispat yazma başarılarının düşük olduğunu tespit etmiştir.

2. Tartışma ve Sonuç

Bu araştırmada, matematik eğitiminde ispat yapma süreci ile ilgili yapılmış olan araştırmalardan bazılarının derlenmesine çalışılmıştır. Yapılan çalışmalara bakıldığında, öğrenciler ve öğretmen adayları üzerine matematiksel ispat yapma süreciyle ilgili çalışmaların sayısı çok olmasına rağmen, öğretmenler üzerine matematiksel ispat yapma ile ilgili çalışmaların sayısının az olduğu görülmektedir. Özellikle de ülkemizde bu alanda yapılan çalışmalar oldukça azdır. Oysa öğretmenlerin ispata yönelik görüşlerinin, algılarının, ispat yapma sürecinde kullandıkları yöntemlerin, stratejilerin, yaklaşımların ve ispat yapma becerilerinin bilinmesi önem taşımaktadır. Çünkü öğretmenlerin sahip oldukları ispata yönelik inanışlar, öğrencilerin ispata yönelik anlamalarını etkilemektedir (Healy & Hoyles, 2000). Öğrenciler üzerinde yapılan araştırmalarda ispat konusundaki sıkıntıların kaynağının sadece öğretmen olmadığı, üniversite sınav

sisteminin, öğrencilerde ispat fikrinin gelişmesinde en büyük engel olduğu, kitapların ve müfredat programlarının matematiksel düşünmeye dönük olmadığı, daha önemlisi, okulöncesinden başlayarak uygulanan, sorgulamayı esas almayan, daha çok ezbere dönük eğitim sistemimizde yaşanan sıkıntılarında payının olduğu da yadsınamaz bir gerçektir. Bu açıdan bakıldığında, araştırmacıların öğretmenlerin ispat yapma düzeyleri, ispat yapma sırasında kullandıkları yöntemler, stratejiler, yaklaşımlar ve bu konudaki algı ve görüşleri üzerine çalışmaların yanı sıra, konunun diğer boyutlarıyla ilgili çalışmalar yapmaları gerekmektedir.

Kaynaklar

- Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics*, 31-35.
- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Education*, 34(4), 479-488.
- Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.
- Altun, M. (2007). *Eğitim fakülteleri ve matematik öğretmenleri için ortaöğretimde matematik öğretimi*. Bursa: Aktüel.
- Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.
- Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Education and Science*, 35(156), 17-31.
- Bahtiyari Albayrak, Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (4. Baskı). Ankara: Derya Kitabevi.
- Baki, A., Güven, B., & Karataş, İ. (2002). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile keşfederek öğrenme. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 2, 884-890.
- Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies*, 7(1/2), 23-40.
- Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298.
- Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin Van Hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Dane, A. (2008). İlköğretim matematik 3. sınıf öğrencilerinin tanım, aksiyom ve teorem kavramlarını anlama düzeyleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 16(2), 495-506.
- De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational studies in mathematics* 38(1), 85-109.
- Doruk, M. ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(1), 241-252.
- Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof*. (NCTM year book 1938). New York: Teachers' College, Columbia University.
- Fitzgerald, J. F. (1996). Proof in mathematics education, *Journal of Education*, 178, 35-45.
- Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 71-90. doi: 10.1007/s10649-008-9134-4
- Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *CBMS issues in mathematics education* (pp. 284-307). USA: The American Mathematical Society.
- Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.
- Güler, G., Kar, T., Öçal, M. F. ve Çiltaş, A. (2011). Prospective mathematics teachers' difficulties in proof. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 336-340.
- Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- Gürsel, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

- Güven, B., Çelik, D., & Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 30, 319.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- Hanna, G. (t.y). *Proof in mathematics*. 23.03.2012 tarihinde www.math.toronto.edu/.../hannajoint.pdf adresinden alınmıştır.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Harel, G., & Showder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. In A. Schoenfeldt, J. Kaput., & E. Dubinsky (Eds). *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Washington, DC: Mathematical Association of Amerika.
- Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for DNR-based instruction. In S. Campbell & R. Zaskis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory*. In C. Mather (Ed.). *Journal of Mathematical Behavior* (pp. 185-212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Hemmi, K. (2006). *Approaching proof in a community of mathematical practice*. Unpublished doctoral dissertation. Stockholm University Department of Mathematics, Stockholm.
- Hemmi, K. (2010). Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 271-291. doi: 10.1007/s10649-010-9256-3
- Henderson, P. B., Marion, B. Fritz, S. J., Riedesel, C., Hamer, J., Scharf, C., et al. (2004). *Materials development in support of mathematical thinking*.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.
- İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Jones, K. (1997). Student-teachers' conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review*, 9, 21-32.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31 (1), 53-60.
- Kitcher, P.(1984). *The nature of mathematical knowledge*. New york: Oxford university press.
- Knapp, J. (2005). *Learning to prove in order to prove to learn*. 23.03.2012 tarihinde http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf adresinden alınmıştır.
- Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Köğçe, D. ve Yıldız, C. (2011). A comparison of freshman and senior mathematics student teachers' views of proof concept. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 1266-1270.
- Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2011). *Ortaöğretim Matematik (9-12.Sınıflar)*. 14.01.2012 tarihinde <http://ttkb.meb.gov.tr/program.aspx?islem=1&kno=86> adresinden alınmıştır.
- Moore, R.C. (1990). *College students' difficulties in learning to do mathematical proofs*. Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Ann Arbor.
- Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249-266.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- NCTM. (2000). Principles and Standards For School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, Roston, Virginia.
- Ören, D. (2007). *Onuncu sınıf öğrencilerinin geometrideki ispat şemalarının bilişsel stilleri ve cinsiyetlerine göre incelenmesine yönelik bir çalışma*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Özer, Ö., & A. Arkan (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. V. *Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 2, 1083-1098.

- Polya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (5th ed.). Princeton University Press.
- Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 319-325.
- Rav, Y. (1999). Why do we proof theorems? *Philosophia mathematica*, 7(1), 5-41.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- ShIPLEY, A. J. (1999). *An investigation of collage students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of American, Washington.
- Schoenfeld, A. (1994). What we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behaviour*, 13, 55-80.
- Senk, S. L., Thompson, D. R., & Johnson, G. J. (2008, July). Reasoning and proof in high school textbooks from the USA. Paper presented at the 11th International Congress on Mathematics Education, Monterey, Mexico.
- Stilianides, A. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20.
- Turner, J. W. (2010). A Brief Introduction to Proofs. 23.10.2012 tarihinde http://www.google.com.tr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&frm=1&source=web&cd=1&ved=0CCkQFjAA&url=http%3A%2F%2Fpersweb.wabash.edu%2Ffacstaff%2Fturnerw%2FWriting%2Fproofs.pdf&ei=YG5sT6XgLqHW0QWsp6TPBg&usg=AFQjCNHtvXRGppPMiuoIT_edwQa00e_hUw&sig2=obqGpMIyytWpP9AmOVwfMA adresinden alınmıştır.
- Umay, A. (1996). Matematik eğitimi ve ölçülmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12, 145-149.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- VanSpronsen, H. D. (2008). *Proof processes of novice mathematics proof writers*. Unpublished Doktorat Dissertation. University Of Montana, Missoula.
- Varghese, T. (2009). Secondary-level student teachers' conceptions of mathematical proof, *IUMPST: The Journal,1* (Content Knowledge). 23.03.2012 tarihinde <http://www.k-12prep.math.ttu.edu> adresinden alınmıştır.
- Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing concept of proof in primary and secondary school*. UK: The Mathematical Association.
- Weber, K. (2002). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge 23.03.2012 tarihinde <http://www.jstor.org/stable/3483117> adresinden alınmıştır.
- Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction, *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, 351-360.
- Weber, K (2006). Investigating and teaching the processes used to construct proofs. In F.Hitt, G. Harel & A. Selden(Eds), *Research in Collegiate Mathematics Education*, VI, 197-232.
- Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 59 –76.
- Yeşildere, S. ve Tüknüklü, E. B., (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181-213.
- Yıldırım, C.(1996). *Matematiksel düşünme*.(4. Baskı) İstanbul: Remzi Kitabevi.